機差自由度估計法（撮要）

汪 厥 明

Methods of Determining The Degrees of Freedom for Errors

by Chuen-Ming Wang

著者最近發表「動差，新動差，乘積動差及其相互間關係」一文，偏重理論。本文之作則注重應用，雖題名為機差自由度估算法，實際上乃應用上述拙作內之若干理論，可說是前作與該作是有聯繫的姊妹篇，如前者可稱為理論的則後者應稱為應用的，玆將該文內容略述如次：

第一 首先說明連結動差及乘積動差（Combined moments and Product moments）與m介值（M-statistics）之關係，此為前作所未述及者，如今補講，取其最簡單者而言之：

$$(1)\quad m_1=(C_1-C_1)=0$$

$$(2)\quad m_2=\frac{n-1}{n}(C_2-C_{1,1})$$

$$(3)\quad m_{1,1}=\frac{1}{n}(C_{1,1}-C_2)$$

第二 次述測定值 X_i，其平均 $\bar{X}$，及其對於族群平均 μ 之偏差（即機差）Σ_i 等之關係如次：

$$X_i=\Sigma+\mu\ ,\quad \bar{X}=\bar{\Sigma}+\mu$$

因此 $\Sigma_i=X_i-\mu\ ,\quad \bar{\Sigma}=\bar{X}-\mu \qquad (\bar{\Sigma}=\frac{1}{n}\mathop{S}_{i=1}^{n}\Sigma_i)$

由此連結動差 C_r 及連結乘積動差 $C_{r_1,r_2,\cdots\cdots,r_h}$ 定義例次：

$$(1)\quad C_r=\frac{1}{n}\mathop{S}_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^r=\frac{1}{n}\mathop{S}_{i=1}^{n}\Sigma_i^r$$

$$(2)\quad C_{r_1,r_2,\cdots\cdots,r_h}=\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-h+1)}\mathop{S}_{i=1}^{n}\mathop{S}_{j=1\ldots}\cdots\cdots\mathop{S}_{l}(X_i-\mu)^{r_1}(X_j-\mu)^{r_2}\cdots(X_l-\mu)^{r_h}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-h+1)}\mathop{S}_{i=1}\mathop{S}_{j=1\ldots}\cdots\cdots\mathop{S}_{l}\Sigma_i^{r_1}\Sigma_j^{r_2}\cdots\cdots\Sigma_l^{r_h}$$

舉例而言：

$$(3)\quad r=1,\quad C_1=\frac{1}{n}\mathop{S}_{i=1}^{n}\Sigma_i$$

$$(4)\quad r=2,\quad C_2=\frac{1}{n}\mathop{S}_{i=1}^{n}\Sigma_i^2$$

$$(5)\quad r_1=r_2=1,\quad C_{1.1}=\frac{1}{n(n-1)}\mathop{S}_{i=1}^{n}\mathop{S}_{j=1}\Sigma_i\Sigma_j$$ （式中 n 是樣品三個體數）

但是因為 μ 往往為未知之數，Σ_i 之確值也是未知的，故 C_r $C_{r_1}, C_{r_2},\cdots\cdots r_h$ 是理論上便

於處理而不能直接供實用的，吾人得另想辦法。

第三　吾人可利用實際採取之樣品，求其平均值 $\bar{X}$，由此計算 m 一介值，今將其定義列述如次：

$$(1)\quad m_r = \frac{1}{n} S_{i=1}^{n}(Xi-\bar{X})^{r} = \frac{1}{n} S_{i=1}^{n}(\Sigma i-\bar{\Sigma}s)d$$

$$(2)\quad m_{r1,\ r2,\cdots rh} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-h+1)} S_{i=1}^{n} S_{i\neq j\ldots}\cdots S_{\neq L} (\dot{X}i-\bar{X})^{rh}$$

$$(\dot{X}j-\bar{X})^{r_2}\cdots\cdots(\dot{X}L-\bar{X})^{rh}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-h+1)} S_{i=1}^{n} S_{i\neq l\ldots}\cdots S_{\neq L} (\Sigma i-\bar{\Sigma}s)^{r1}$$

$$(j\Sigma-\bar{\Sigma}s)^{r_2}\cdots\cdots(\Sigma L-\bar{\Sigma}s)^{rh}$$

$$(3)\quad r=1,\quad m_1 = \frac{1}{n} S_{i=1}^{n}(\dot{X}i-\bar{X}) = S_{i=1}^{n}(\Sigma i-\bar{\Sigma}s) = 0$$

$$(4)\quad r=2,\quad m_2 = \frac{1}{n} S_{i=1}^{n}(\dot{X}i-\bar{X})^2 = \frac{1}{n} S_{i=1}^{n}(\dot{X}i-\bar{X})^2 = \frac{1}{n} S_{i=1}^{n}(\Sigma i-\bar{\Sigma}s)^2$$

$$(5)\quad r_1=r_2=1,\quad m_{1,1} = \frac{1}{n(n-1)} S_{i=1}^{n} S_{i\neq j}(\dot{X}i-\bar{X})(\dot{X}j-\bar{X}) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$S_{i=j}^{n} S_{i\neq j}(\Sigma i-\bar{\Sigma}s)(\Sigma j-\bar{\Sigma}s)$$

m 一介值可以實測實算已如上述，連結動差及乘差雖爲理想的，但可利用其與 m 一介值之關係而求出之，由此可以將理論與現實聯繫起來。

第四　幾差雖是理想的假說的，但吾人如能明瞭其性質，吾人也就可利用其原理於實際問題許多統計專家和試驗主持人都相信與生物及農業試驗有關之幾差至少某種是常態分佈 (normal Distribution) 的，常態分佈早爲 Gauss 氏所發見，有悠久的歷史，其性質早已明瞭。

第五　常態機差的性質可概括如下：

(甲)　其族群是無窮大的。

(乙)　一樣大的正負機差有一樣大的頻度，所以其族群平均是等於〇，因此期望值 $E\Sigma i=0$

(丙)　連續地變異於土〇〇範圍內，其所有量愈大，其頻度愈小，所以其量等於〇的幾差之頻度爲最大。

(丁)　常態機差是互相獨立無關的，所以兩機差相乘之期望值等於〇即 $E\Sigma^{j}=0$

將其要點以公式示之如次：

$$(1)\quad E\Sigma i = EC_1 = 0$$

$$(2)\quad E\Sigma i\Sigma j = EC_{1,1} = 0$$

(3) $E\Sigma i = EC_2 = \mu_2 = \delta^2$

式中 δ^2 無疑的是常態族群之變方 (Variance) 及生物。

第六 利用上述對於常態機差之理論來估算農業，及生物試驗上之機差自由度。

I, 單個變方之自由度：

$E\Sigma[S(\dot{X}i-X)^2] = SE(\Sigma i-\Sigma s)^2 = (n-1)\delta^2$

II, 組內組間之變方自由度：樣品個體個分為 m 組，每組 n 個個體。

$S(\dot{X}ij-\overline{X})^2 = S(\dot{X}ij-\overline{X}j)^2 = S(\dot{X}ij-\overline{X}_{,,})$

$E\Sigma[S(\dot{X}ij-\overline{X}j)^2] = S_{i=1}^{n} E(\Sigma ij-\Sigma j)^2 = m(n-1)\delta^2$

$E\Sigma[S(\overline{X}j-\overline{X}_{,,})^2] = S E(\Sigma j-\Sigma_{,,})^2 = (m-1)\delta^2$

III, 双分組之變方自由度：樣品個體 N 個二種分組，第一種分為 n 組，每組 m 個體，第二種是分為 m 組，每組 n 個個體，各平方和之關係如次：

$S(\dot{X}ij-\overline{X}_{,,})^2 = S(\overline{X}i.-\overline{X}_{,,})^2 = S(\overline{X}j-\overline{X}_{,,})^2 = S(\overline{X}ij-\overline{X}i.-\overline{X}.j+\overline{X}_{,,})^2$

對於右邊兩組間平方和之自由度可做 I 及 II 兩項求出之，惟有最後之交感平方和之自由度，則有說明之必要，為方便計先列一表：

$E\epsilon_{ij}^2 = \delta^2$　　$E\epsilon_{ij}\overline{\epsilon}_{i.} = \frac{\delta^2}{m}$　　$E\overline{\epsilon}_{i.}\overline{\epsilon} = \frac{\delta^2}{mn}$

$E\overline{\epsilon}_{i.}^2 = \frac{\delta^2}{m}$　　$E\epsilon_{ij}\overline{\epsilon}_{j} = \frac{\delta^2}{n}$　　$E\overline{\epsilon}_{.j}\overline{\epsilon} = \frac{\delta^2}{mn}$

$E\overline{\epsilon}_{.j} = \frac{\delta^2}{n}$　　$E\epsilon_{ij}\epsilon = \frac{\delta^2}{mn}$

$E\overline{\epsilon}_{,,}^2 = \frac{\delta^2}{mn}$　　$E\overline{\epsilon}_{i.}\overline{\epsilon}_{j} = \frac{\delta^2}{mn}$

$$E\Sigma[S'(\dot{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X}_{,,})^2] = SE[(\Sigma_{ij}^2+\overline{\Sigma}_{i.}^2+\overline{\Sigma}_{.j}^2+\overline{\Sigma}_{,,}^2)$$

$$-2(\Sigma_{ij}\overline{\Sigma}_{i.}+\Sigma_{ij}\overline{\Sigma}_{.j}-\Sigma_{ij}\overline{\Sigma}_{,,}-$$

$$\overline{\Sigma}_{i.}\overline{\Sigma}_{.j}-\overline{\Sigma}_{i.}\overline{\Sigma}_{,,}+\overline{\Sigma}_{.j}\overline{\Sigma}_{,,})] = (m-1)(n-1)\delta^2$$

IV, 二元二群法之變方自由度估算法：該法為 yotes 氏所創他的變方分析可以下式表出之：

X群：$S(\dot{X}uv-\overline{t}_{,.})^2 = S(tuv-tu)^2 = S(\overline{X}u.-tu.)^2 + S(\dot{X}uv-tuv-\overline{X}u.+tu.)^2$

Y群：$S(\dot{Y}uv-\overline{t})^2 = S(tuv-tv)^2 = S(\overline{Y}.v-t.v)^2 + S(\dot{Y}uv-tuv-\overline{Y}.v+t.v)^2$

以X群說明其符號，由此類推到Y群：

$\dot{X}uv$……第uv品種其試區之收量，tuv……該品種之改正產量，

$\overline{X}u$……該試區所在區集之平均收量，tu……為其改正收量，

t……爲總平均，tuv 之計算係引用 Goulden 氏之記號法但對於重複次數該文用 r 不用 n

yates 氏所用之分析法當然大有討論餘地，不過關於各平方和中所含之機差成分分析是毫無錯誤的，今試論之於下，爲便利計列一介值機差期望值表如次：

以 X 群論之由此可推論到 Y 群：

A. $E\Sigma(X_{uv}^{2}) = \frac{2rp2}{2rp2}\delta^2$

B. $E\Sigma(\overline{X}_{u.}^{2}) = \frac{2rp}{2rp2}\delta^2$

C. $E\Sigma(tuv^{2}) = \frac{p2+2p-2}{2rp2}\delta^2$

D. $E\Sigma(tu.^{2}) = \frac{2p-1}{2rp2}\delta^2$

E. $E\Sigma(tuv\ tuv) = \frac{p-2}{2rp2}\delta^2$

F. $E\Sigma(\overline{t}_{..}^{2}) = \frac{1}{2rp2}\delta^2$

G. $E\Sigma(Xuvtuv) = \frac{r2}{2rp2}\delta^2$

H. $E\Sigma(Xuv\overline{t}u.) = \frac{1}{2rp2}\delta^2$

I. $E\Sigma(Xuv\overline{X}u.) = \frac{2rp}{2rp2}\delta^2$

J. $E\Sigma(tuv\ \overline{X}u.) = \frac{1}{2rp2}\delta^2$

K. $E\Sigma(tuv\ \overline{t}u) = \frac{1}{2rp2}\delta^2$

Z. $E\Sigma(tuv\ \overline{t}u.) = \frac{2p-1}{2rp2}\delta^2$

M. $E\Sigma(Xu.\ \overline{t}u.) = \frac{1}{2rp2}\delta^2$

N. $E\Sigma(tuu\ \overline{t}u.) = \frac{1}{2rp2}\delta^2$

將上表各值應用於各平方和之機差期望值如下：

(1) 品種平方和： $E\Sigma[S(tuv-\overline{t}u.)^2 + S(tuv-\overline{t}.v)^2] = SE\Sigma[(tuv^2+t.u2-2tuv\ \overline{t}u.) + (tuv+t.v^2-2tuvtu)] = 2rp2\ \frac{1}{2rp2}((r2+2p-2) + (2p-1) - 2(2r-1)]\delta^2 = (p^2-1)$

(2) 區集平方和： $E\Sigma[S(\overline{X}u.-\overline{t}_{..})^2 + S(y.v-\overline{t}_{..})^2] = SE\Sigma[Xu.^2 + \overline{t}u_{..}^2 - 2\overline{X}u.\ t_{..}) + (Y.v^2 + \overline{t}o^2 - 2\overline{Y}.v\overline{t}_{..})] = 2rp2\ \frac{(2rp)+(1)-(2)}{2rp2}\delta^2 = (2rp-1)\delta^2$

(3) 交感平方和： $E\Sigma[S(Xuv-tuv-\overline{X}u.2\ tv.)^2 + S(Yuv-tuv-Y.v+t.v)^2] = 2rp2\frac{1}{2rp2}(2rp^2-2rp-P2+1)\delta^2 = (p-1)(2rp-p+1)\delta^2$

$ES[(Xuv-tuv-\overline{X}u.+\overline{t}u.)^2] = E\Sigma[X_{uv}^{2}+t_{uv}^{2}+\overline{X}tu.^2 - 2(Xuv\ tuv+Xuv\overline{X}u.) - Xuv\overline{t}u. - tuv\overline{X}u. + tuv\overline{t}u. + \overline{X}u.\overline{t}u.)] = \frac{1}{2rp2}[(2rp^2)\ n\ (p^2+2p-2)+(2rp) + (2p-1)-(2rp^2)-(4rp)+(2)+(2)-2(2p-1)-(2)]\delta^2$